РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В. КЕЛДЫША

С.Ю. Садов

О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ВПИСАННОСТИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА В ОКРУЖНОСТЬ

Москва, 2003 г.

УДК 514.1+519.11

С.Ю. Садов. О необходимом и достаточном условии вписанности четырехугольника в окружность. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2003 г. № 94.

Выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d и диагоналями p, q является вписанным тогда и только тогда, когда $abp - bcq + cdp - daq = 0$. Несмотря на простоту, это условие, по-видимому, ново и неожиданно трудно доказуемо. В работе привлекаются методы компьютерной алгебры и локального нелинейного анализа.

S.Yu. Sadov. On a necessary and sufficient cyclicity condition for a quadrilateral. Preprint of the M.V. Keldysh Institute for Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2003, No 94.

A convex quadrilateral with sides a, b, c, d and diagonals p, q is cyclic iff $abp - bcq + cdp - daq = 0$. This condition, in spite of its simplicity, appears to be unnoted and unexpectedly proof-resilient. We employ advanced methods of computer algebra and nonlinear analysis.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, гранты 02-01-01067 и 01-01-00517.

E-mail: sadov@keldysh.ru

Введение

В работе рассматривается необходимое и достаточное условие того, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным (его вершины лежат на одной окружности). Условие формулируется в терминах длин сторон и диагоналей четырехугольника. Обозначим

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = p, \quad BD = q.$$

Известно классическое условие Птолемея:

$$C_2(a, b, c, d, p, q) \stackrel{\text{def}}{=} ac + bd - pq = 0. \tag{0.1}$$

(Буква C — от английского *cyclic* — вписанный. Индекс 2 обозначает степень однородности полинома.) Новое условие задается однородным полиномом третьей степени

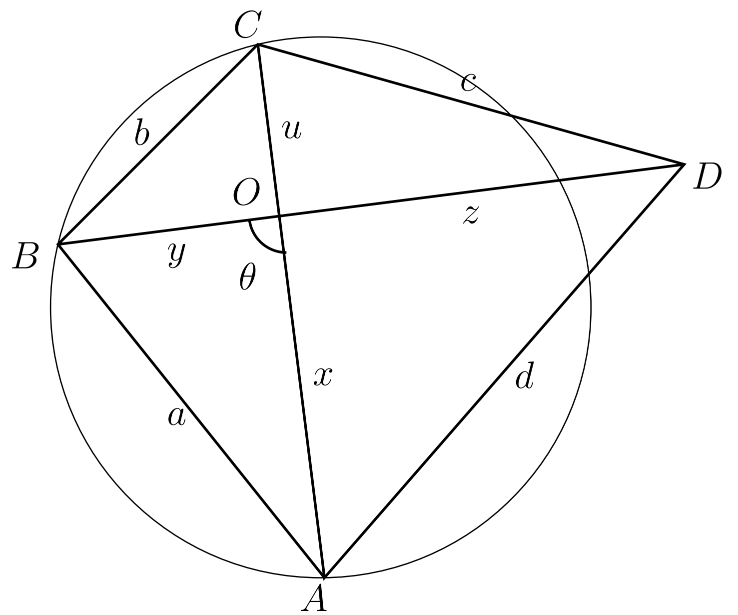
$$C_3(a, b, c, d, p, q) \stackrel{\text{def}}{=} abp - bcq + cdp - daq = 0. \tag{0.2}$$

Функция C_2 всегда неотрицательна. В отличие от нее, знак функции C_3 определяет, лежит ли точка D внутри или вне окружности ABC. Такой критерий может быть полезен в приложениях.

Доказательство достаточности условия (0.2), найденное автором, — неэлементарно и очень громоздко. Мы показываем, что некоторая система полиномиальных уравнений не имеет решений в области допустимых значений переменных. Существенной частью доказательства является локальный анализ системы вблизи границы области.

Проверка всех выкладок настоящей работы вручную, без использования системы компьютерной алгебры (я использовал *Maple*), вряд ли возможна. Более того, выделение ветвей решения ведет к необходимости разрешения особенностей и многочисленным случаям и подслучаям. Анализ некоторых вырожденных случаев (см. п. 5.1 и 6.1) еще требует завершения и здесь не приводится.

В.П. Варин предложил значительно более простое доказательство (по-видимому, допускающее проверку вручную), основанное на открытом им замечательном тождестве, связывающем величины C_2 и C_3. В оправдание подхода, используемого здесь, укажем на его универсальность (сдерживаемую недостаточной развитостью программного обеспечения для анализа особенностей многомерных алгебраических уравнений).



$$p = x + u$$
$$q = y + z$$
$$t = \cos\theta$$

Рис. 1

§ 1. Критерий Птолемея

Теорема 1. (А) *Для любого четырехугольника $ABCD$ имеет место неравенство*

$$ac + bd \geq pq. \tag{1.1}$$

(Б) *Неравенство* (1.1) *обращается в равенство тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ вписанный.*

Строго говоря, Птолемею принадлежит часть *тогда* утверждения Б.

Приведем ссылки на три элементарных доказательства, найденные в легко доступной литературе:

1) Доказательство, основанное на неравенстве треугольника для педального треугольника и условии вырождении этого треугольника в отрезок прямой Симсона [3, гл. 2, § 5-6].

2) Доказательство, основанное на преобразовании инверсии [4], задача 28.24.

3) Доказательство, использующее комплексные числа [4], Приложение 1.

Последнее доказательство особенно просто, поэтому позволим себе воспроизвести его. Отождествляя векторы на плоскости с комплексными числами и помещая точку A в начало координат, напишем

$$\vec{AB} = z_1, \quad \vec{AC} = z_2, \quad \vec{AD} = z_3,$$

тогда

$$\vec{BC} = z_2 - z_1, \quad \vec{CD} = z_3 - z_2, \quad \vec{BD} = z_3 - z_1,$$

и произведения, участвующие в теореме Птолемея, записываются в виде

$$ac = |z_1 z_3 - z_1 z_2|, \qquad bd = |z_2 z_3 - z_1 z_3|, \qquad pq = |z_2 z_3 - z_1 z_2|.$$

Неравенство (1.1) представляет собой неравенство треугольника для тройки вершин $z_1 z_2$, $z_1 z_3$, $z_2 z_3$. Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка $z_2 z_3$ лежит на отрезке, соединяющем $z_1 z_2$ и $z_1 z_3$. Это условие выражается формулой

$$\arg(z_1 z_2 - z_2 z_3) \;=\; \arg(z_1 z_2 - z_1 z_3).$$

Преобразуем его к виду

$$\arg z_2 - \arg z_1 \;=\; \arg(z_2 - z_3) - \arg(z_1 - z_3)$$

и перепишем в геометрических обоначениях

$$\angle BAC \;=\; \angle BDC.$$

Получилось условие равенства углов, опирающихся на одну и ту же сторону (BC) нашего четырехугольника, т.е. условие вписанности. ■

§ 2. Алгебраическое доказательство теоремы 1 (Метод грубой силы)

2.1. Пространство выпуклых четырехугольников

Множество всех шестерок (a, b, c, d, p, q), соответствующих выпуклым невырожденным четырехугольникам, образует пятимерное подмногообразие $\mathcal{Q}$, лежащее в положительном гипероктанте пространства параметров $\mathbb{R}^6$. Его замыкание $\overline{\mathcal{Q}}$ — многообразие с кусочно-гладким краем.

Многообразие $\mathcal{Q}$ допускает удобную глобальную параметризацию.

Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD через O. Введем пять независимых параметров (см. Рис. 1)

$$OA = x, \quad OC = u, \quad OB = y, \quad OD = z, \quad \cos\angle AOB = t, \tag{2.1}$$

подчиненных ограничениям

$$x > 0, \quad u > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad -1 < t < 1. \tag{2.2}$$

Длины сторон и диагоналей даются выражениями

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + y^2 - 2xyt, \\ b^2 &= u^2 + y^2 + 2uyt, \\ c^2 &= u^2 + z^2 - 2uzt, \\ d^2 &= x^2 + z^2 + 2xzt, \\ p &= x + u \\ q &= y + z. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) описывают взаимно-однозначное отображение области (2.1) из $\mathbb{R}^5$ на $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^6_+$. Непосредственное описание многообразия $\mathcal{Q}$ как подмножества в $\mathbb{R}^6_+$ в терминах $a, \ldots, q$ гораздо более замысловато. Приведем его для справки. Описание состоит из одного уравнения и нескольких неравенств (неравенства треугольников, условия положительности длин и неравенства, отвечающие за выпуклость).

Четырехугольник есть вырожденный случай тетраэдра, когда все вершины лежат в одной плоскости. Объем V тетраэдра со сторонами a, b, c, d, p, q дается *определителем Кэли-Менгера* [1, п. 9.7.3]

$$288\,V = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & p^2 & d^2 \\ 1 & a^2 & 0 & b^2 & q^2 \\ 1 & p^2 & b^2 & 0 & c^2 \\ 1 & d^2 & q^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

(Об истории формулы объема тетраэдра см. [5].) Раскрывая определитель, получим уравнение четырехугольника в явном виде

$$\begin{aligned} &a^4c^2 + a^2c^4 + b^4d^2 + b^2d^4 + p^4q^2 + p^2q^4 + \\ &+(abp)^2 + (bcq)^2 + (cdp)^2 + (daq)^2 - \\ &-(abc)^2 - (abd)^2 - (acd)^2 - (acp)^2 - (acq)^2 - (apq)^2 - \\ &-(bcd)^2 - (bdp)^2 - (bdq)^2 - (bpq)^2 - (cpq)^2 - (dpq)^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

К этому уравнению добавляются упомянутые неравенства, часть из которых очевидна

$$\begin{aligned} &a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad p > 0, \quad q > 0, \\ &|a - b| < p < a + b, \qquad |c - d| < p < c + d, \\ &|b - c| < q < b + c, \qquad |a - d| < q < a + d. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Неравенства, отвечающие за выпуклость, не столь тривиальны. При заданных a, b, c, d, p построим треугольники ABC и ADC на общем основании AC. Вершины B и D могут лежать либо по разные стороны от прямой AC, либо по одну сторону (Рис. 2). Найдем $q = BD$ из построенной конфигурации.

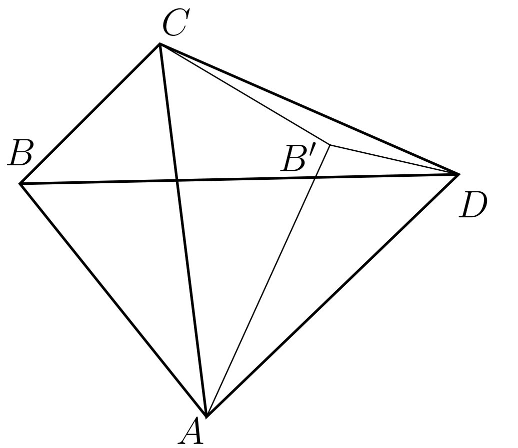


Рис. 2

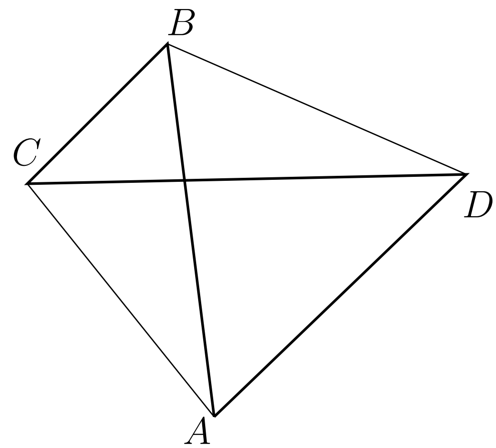


Рис. 3

В обоих случаях условия (2.5) и (2.6) выполнены. Неравенство, отличающее выпуклый четырехугольник $ABCD$ от невыпуклого $AB'CD$:

$$\angle BAD \ > \ \angle CAD.$$

Используя теорему косинусов, перепишем это условие в виде

$$\frac{a^2+d^2-q^2}{ad} \ = \ 2\cos\angle BAD \ < \ 2\cos\angle CBD \ = \ \frac{a^2+p^2-b^2}{ap}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, получим полиномиальное неравенство. Оно еще не гарантирует выпуклости четырехугольника $ABCD$. Необходимо добавить неравенство, исключающее случай, когда точки A и C лежат по одну сторону от прямой BD. Двух неравенств все еще недостаточно. Например, система неравенств

$$\angle BAC < \angle BAD, \qquad \angle ABD < \angle ABC$$

допускает конфигурацию (четырехвершинник) с неправильным порядком вершин (Рис. 3). Трех неравенств

$$\angle BAC < \angle BAD, \qquad \angle ABD < \angle ABC, \qquad \angle CBD < \angle ABC$$

уже достаточно для характеризации выпуклых четырехугольников т.е. к (2.6) добавляются неравенства

$$\begin{aligned} p\,(a^2+d^2-q^2) \ &< \ d\,(a^2+p^2-b^2), \\ q\,(a^2+b^2-p^2) \ &< \ a\,(b^2+q^2-c^2), \\ q\,(a^2+b^2-p^2) \ &< \ b\,(a^2+q^2-d^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Можно ли упростить условия выпуклости — уменьшить число неравенств или понизить их степень (даже увеличив их количество), принимая во внимание (2.6), — я не знаю.

2.2. Пространство вписанных четырехугольников

Шестерки длин сторон и диагоналей *вписанных* четырехугольников образуют подмногообразие $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$ коразмерности 1. В координатах $x, \ldots, t$ оно описывается простым уравнением второй степени

$$Cycl(x, y, z, u, t) \stackrel{\text{def}}{=} xu - yz = 0. \tag{2.8}$$

(Элементарная теорема: треугольники AOB и COD подобны по двум углам $\angle AOB = \angle COD$ и $\angle OAB = \angle ODC$ тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности.)

С другой стороны, часть Б теоремы Птолемея утверждает, что в координатах $a, \ldots, q$ подмногообразие $\mathcal{C}$ выделяеется в $\mathcal{Q}$ условием (0.1). Цель этого пункта — установить эквивалентность (0.1) и (2.8) алгебраически. Заодно мы докажем и неравенство (1.1).

Выразив $a, \ldots, q$ из (2.3) и подставив в (0.1), получим выражение, содержащее квадратные корни. Домножая на сопряженные выражения, избавимся от иррациональностей и получим

$$\begin{aligned}
&C_2 \cdot (ac - bd - pq)(ac + bd + pq)(ac - bd + pq) = \\
&-4u^4x^2z^2 + 4x^4u^2z^2t^2 + 32x^2y^2u^2z^2 + 4y^4u^2z^2t^2 + 4x^2y^2t^2u^4 + 4x^2y^2t^2z^4 \\
&-4x^2y^2z^4 - 4y^4u^2z^2 - 4x^2y^2u^4 - 4x^4u^2z^2 - 4y^4x^2z^2 - 4u^2y^2z^4 - 4u^2y^2x^4 \\
&-32x^2y^2u^2z^2t^2 + 16x^3yt^2u^3z - 8x^3yt^2z^3u - 8y^3xt^2u^3z + 16y^3xt^2z^3u \\
&+4u^4x^2z^2t^2 + 4y^4x^2z^2t^2 + 4u^2y^2t^2x^4 + 4u^2y^2t^2z^4 + 8x^3uy^3z + 16x^3uy^2z^2 \\
&+8x^3uyz^3 + 16x^2u^2y^3z + 16x^2u^2yz^3 + 8xu^3y^3z + 16xu^3y^2z^2 + 8xu^3yz^3 \\
&+8x^3u^3z^2t^2 + 8y^3u^2z^3t^2 + 8x^3y^2t^2u^3 + 8x^2y^3t^2z^3 - 8x^2u^4yz - 8x^4u^2yz \\
&-16x^3u^3yz - 8y^4z^2xu - 16y^3z^3xu - 8y^2z^4xu - 8u^3yt^2z^3x - 8y^3ut^2x^3z \\
&-8x^3u^3y^2 - 8x^3u^3z^2 - 8x^2z^3y^3 - 8y^3z^3u^2 - 16y^2u^3z^2t^2x + 8y^4uz^2t^2x \\
&-16y^3u^2zt^2x^2 + 8x^2yt^2u^4z - 16x^3uz^2t^2y^2 + 8x^4u^2zt^2y - 16x^2u^2z^3t^2y \\
&+8xy^2t^2z^4u.
\end{aligned}$$

В дальнейшем громоздкие полиномы, возникающие в вычислениях, не выписываются явно. Те из них, которые используются лишь локально, в пределах конкретного этапа рассуждения, обозначаются P_k, где k —

общая степень. Так, назовем приведенный выше многочлен P_{10}. (Его содержательная характеризация как главного минора определителя Кэли-Менгера (2.4) [1, п. 9.7.3.8] здесь не используется.)

Компьютерная факторизация приводит к простому результату, который запишем в смешанных переменных, связанных соотношениями (2.3),

$$P_{10}(x, y, x, u, t) = -4(1-t^2)p^2q^2(xu-yz)^2. \tag{2.9}$$

Поскольку

$$(1-t^2)p^2q^2 > 0, \tag{2.10}$$

то (0.1) влечет (2.8). Доказано утверждение *только тогда* теоремы 1 (Б).

Предположим, что неравенство (1.1) неверно для некоторого четырехугольника. Тогда существует кривая $\gamma : [0,1] \to \mathcal{Q}$ в пространстве четырехугольников, такая, что $C_2(\gamma(0)) > 0$ и $C_2(\gamma(1)) < 0$, следовательно, существует точка $s \in (0,1)$, в которой $C_2(\gamma(s)) = 0$. В силу (2.9) и (2.10), для любого невырожденного четырехугольника

$$(ac+bd-pq)(ac+pq-bd)(bd+pq-ac) \geq 0. \tag{2.11}$$

Если 2-й и 3-й сомножители не обращаются в 0 в s_0, то произведение (2.11) меняет знак, что невозможно. Следовательно, хотя бы два из сомножителей в (2.11) одновременно равны 0 в s_0. Однако тогда четырехугольник $\gamma(s_0)$ оказывается вырожденным. Действительно, если, например

$$ac+bd-pq = ac+pq-bd = 0,$$

то $ac = 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (1.1).

Остается доказать утверждение *тогда* части Б. Для этого следует установить, что $(ac+pq-bd)$ и $(bd+pq-ac)$ не могут (по отдельности) обращаться в 0. Многообразие $\mathcal{C}$ линейно связно: любой вписанный четырехугольник можно деформировать в любой другой, вписанный в ту же окружность, сдвигом вершин вдоль окружности, при котором вершины никогда не сливаются. В каждой точке многообразия $\mathcal{C}$ обращается в 0 ровно один из множителей в (2.11) — иначе четырехугольник был бы вырожденным. Множество нулей каждого из них замкнуто в $\mathcal{C}$. Из связности следует, что два из этих множеств пусты, а оставшееся совпадает с $\mathcal{C}$. Ясно (из любого примера вписанного четырехугольника), что не пусто множество нулей функции C_2, значит, $(Cycl = 0) \Leftrightarrow (C_2 = 0)$. ■

§ 3. Кубический критерий вписанности

Теорема 2. *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда выполнено условие* (0.2)*. Если $C_3 \neq 0$, то*

$$\operatorname{sign} C_3 = \operatorname{sign} Cycl. \tag{3.1}$$

Замечания

1. *Существенность условия выпуклости.* В отличие от условия Птолемея (0.1), условие (0.2) выполняется для некоторых невыпуклых (и, значит, невписанных) четырехугольников. В Приложении вычислено частное однопараметрическое семейство таких четырехугольников.

2. *Знак* C_3 определяет положение вершины четырехугольника относительно окружности, проведенной через три другие вершины. Вероятно, C_3 — простейшая функция параметров $a, \ldots, q$, обладающая этим свойством. Следующие условия равносильны:

(i) точка A лежит вне окружности BCD

(ii) точка C лежит вне окружности BAD

(iii) точка B лежит внутри окружности ADC

(iv) точка D лежит внутри окружности ABC

(v) $\operatorname{sgn}(xu - yz) = \operatorname{sgn} C_3 > 0$;

Доказательство необходимости условия (0.2) элементарно. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Тогда

$$4R = \frac{abp}{S_{ABC}} = \frac{bcq}{S_{BCD}} = \frac{cdp}{S_{CDA}} = \frac{daq}{S_{DAB}},$$

где S — площадь треугольника. Равенство (0.2) следует выражает равносоставленность нашего четырехугольника:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD} = S_{CDA} + S_{DAB}. \qquad \blacksquare$$

Доказательство достаточности гораздо сложнее. Метод грубой силы в простой редакции недостаточен: при рационализации условия $C_3 = 0$ появляются паразитные решения — см. п. 5.2. Изложим план доказательства. Рассмотрим величину C_3 как функцию переменной z при фиксированных x, u, y, t. Пишем

$$C_3(a, b, c, d, p, q) = F(x, y, z, u, t) \quad \text{с подстановкой (2.3).}$$

Тогда

1. $F \to -\infty$ при $z \to \infty$. (Простой факт, Лемма 4.1 ниже.)

2. $F > 0$ при $z = 0$. (Предложение 4.2, трудное.)

3. $F = 0$, когда точка D, двигаясь по лучу OD (меняем z), попадает на окружность ABC. При этом $z = z_* = xu/y$.

Остается показать, что функция $F(\dots, z)$ не имеет других нулей на $(0, \infty)$. Это легко установить в частном случае, осесимметричных четырехугольников с перпендикулярными диагоналями (Лемма 3.1). Таким образом, существуют значения x, y, u, t, при которых функция $F(\dots, z)$ имеет единственный положительный корень. Смена числа корней может произойти только с появлением кратного корня, т.е. решения системы

$$F(x, y, z, u, t) = 0, \qquad \partial_z F(x, y, z, u, t) = 0. \tag{3.2}$$

Предположим, что множество решений системы (3.2) на $\mathcal{Q}$ непусто. Обозначим его $\mathcal{M}$. Изучая асимптотики решений системы (3.2) вблизи границы $\partial\mathcal{Q}$ множества $\mathcal{Q}$, мы найдем, что не существует семейства решений в $\mathcal{Q}$, имеющих предельную точку на $\partial\mathcal{Q}$. (Хотя на самой границе есть много решений.) Этот анализ (с пробелом, указанном во Введении) изложен в заключительном § 6.

Сделаем редукцию по однородности и рассмотрим сечение $\mathcal{Q}_1$, выделенное в $\mathcal{Q}$ уравнением

$$x + y + z + u = 1. \tag{3.3}$$

Множество $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} \cap \mathcal{Q}_1$ компактно, поскольку его замыкание не пересекается с $\partial\mathcal{Q}_1$. Максимум функции $f(x, y, z, u, y) = t$ на $\mathcal{M}_1$ достигается. Точка максимума находится методом множителей Лагранжа, который приводит (Лемма 5.1) к усиленной системе по сравнению с (3.2): либо

$$F \,=\, F_x \,=\, F_y \,=\, F_z \,=\, F_u \,=\, 0, \tag{3.4}$$

либо $F = F_z = F_{zz} = 0$. В § 5 мы докажем, что система (3.4) не имеет решений в области (2.2). Отсутствие решения во втором случае пока подтверждено лишь численным сканированием.

Таким образом, множество решений системы (3.2) в области (2.2) пусто, следовательно, при любых значениях x, y, u, t корень $z = z_*$ функции $F(\dots, z)$ — единственный. ■

Лемма 3.1. *В случае* $x = u$ *и* $t = 0$ *имеем* $\partial_z F < 0$ *при* $z > 0$.

Доказательство. В данном случае $a = b$, $c = d = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\partial_z c = z/c$,

$$F \,=\, 2x\,(a^2 + c^2) \,-\, 2ac\,(y + z),$$

$$\partial_z F \,=\, 4xz \,-\, 2ac \,-\, 2a\,(z/c)\,(y + z) \,<\, 2a\,(2z - (c^2 + z^2)/c) \,\le 0. \qquad ■$$

§ 4. Поведение функции F при $z \to \infty$ и при $z \to 0^+$

4.1. Результаты

В настоящей работе относительно простые утверждения называются Леммами, более сложные — Предложениями.

Лемма 4.1. *Пусть x, y, u, t фиксированы. Тогда при $z \to \infty$*

$$F(x,y,u,z,t) = (p-a-b)z^2 + O(z).$$

В частности, $F < 0$ при больших z.

Доказательство. Поскольку $c = z + O(1)$, $d = z + O(1)$, $q = z + O(1)$, имеем

$$F(x,u,y,z,t) \;=\; (ab+cd)p - (ad+bc)q \;=\; z^2 p - (az+bz)z + O(z).$$

■

Предложение 4.2. *Пусть точка D лежит на стороне AC треугольника ABC и отлична от точек A и C. Тогда для вырожденного четырехугольника $ABCD$ имеем $C_3(a,b,c,d,p,q) > 0$ при отсутствии прочих вырождений. В более явном виде,*

$$(AB \cdot BC + AD \cdot CD) \cdot AC > (AB \cdot AD + CB \cdot CD) \cdot BD.$$

4.2. План доказательства Предложения 4.2

Не ограничивая общности, положим $p = 1$ и примем $\angle ADB \le \pi/2$. На множестве $\mathcal{D} = \{0 < x < 1,\ y > 0,\ 0 \le t < 1\}$ рассмотрим функцию

$$F_0(x,y,t) \overset{\text{def}}{=} F(x,y,\ z=0,\ u=1-x,\ t).$$

Множество $\mathcal{D}$ связно. Достаточно доказать, что на нем $F_0 \ne 0$: тогда знак F_0 постоянен, а из Леммы 3.1 следует, что $F_0 > 0$ при $t = 0$, $x = 1/2$. В п. 4.3 рассматривая рационализацию условия (0.2), покажем, что $F_0 \ne 0$ при $y \ge 1$. Затем в п. 4.4 исследуем F_0 на границе компактного множества $\mathcal{K}$, заданного неравенствами

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad 0 \le y \le 1,$$

и покажем, что там $F_0 \ge 0$. В п. 4.5 установим, что уравнение ∇F_0 не имеет решений во внутренности множества $\mathcal{K}$, следовательно, $\min F_0$ достигается на его границе и $F_0 > 0$ на внутренности $\mathcal{K}$. ■

4.3. Рационализация и неравенство $F_0[y \geq 1] \neq 0$

Выражение F_0 через $a, \ldots, q$ содержит квадратичные иррациональности. Функция

$$R(a,b,c,d,p,q) \;=\; C_3(a,b,c,d,p,q)\, C_3(a,b,-c,-d,p,q)$$
$$\times\, C_3(-a,b,c,d,p,q)\, C_3(-a,b,-c,-d,p,q)$$

есть рациональная функция от a^2, b^2, c^2, d^2, p, q, и, следовательно, рациональная функция от x, u, y, z, t. Ее ограничение на рассматриваемое множество $z=0$, $p=1$, $a=x$, $b=u=1-x$ обозначим через R_0.

С помощью *Maple* находим факторизацию

$$R_0 = 4\,(1-t^2)\, y^2\, x\, T_0(x,y,t)$$

где T_0 — многочлен. При $|t| \neq 1$, $x, y \neq 0$ неравенство $T \neq 0$ влечет $R_0 \neq 0$ и, следовательно, $F_0 \neq 0$. Многочлен T_0 представим в виде

$$T_0(x,y,t) \;=\; A(y^2-1) + 4y^2(1-t^2),$$
$$A = 3y^2 + 4(1-2x)ty + (1-2x)^2.$$

Поскольку при $|t| < 1$,

$$A \;>\; 3y^2 - 4y|1-2x| + (1-2x)^2 \;= (3y - |1-2x|)(y - |1-2x|)$$

то при $y \geq 1$, $0 < x < 1$, имеем $A > 0$, откуда $T_0 > 0$.

4.4. Предельные случаи $x = 0, 1$, $z = 0$ и $t = 1$

а) При $x = 0$ (случай $x = 1$ аналогичен) имеем $d = 0$, $c = 1$, $a = q$, $F_0 = abp - bcq = ab - ba = 0$.

б) При $z = 0$ имеем $q = 0$, следовательно $F_0 = ab + cd > 0$.

в) При $t = 1$ имеет место результат более общего характера (без предположения $z = 0$), который неоднократно понадобится в дальнейшем. Из него следует, что $F_0|_{t=1} \geq 0$.

Лемма 4.3. *Имеет место формула*

$$F|_{t=1} \;= (x+y+z+u)(x-y)(u-z)\,(\mathrm{sgn}(x-y) \;+\; \mathrm{sgn}(u-z)). \quad (4.1)$$

Доказательство. Формула (4.1) следует из равенств при $t = 1$:

$$a = |y-x|, \quad b = y+u, \quad c = |u-z|, \quad d = z+x. \qquad \blacksquare$$

4.5. Отсутствие внутренних точек экстремума функции F_0

В этом пункте мы используем декартовы координаты. Поместим начало координат в точку A и направим первую ось вдоль AC. Координаты остальных точек суть $D(d,0)$, $C(p,0)$, $B(\xi,\eta)$, $\eta > 0$. Параметры d, c, $p=c+d$ не зависят от ξ,η, а параметры a, b, q и их производные даются формулами

$$
\begin{array}{lll}
a^2=\xi^2+\eta^2 & a_\xi=\dfrac{\xi}{a} & a_\eta=\dfrac{\eta}{a}\\[2ex]
b^2=(\xi-p)^2+\eta^2 & b_\xi=\dfrac{\xi-p}{b} & b_\eta=\dfrac{\eta}{b}\\[2ex]
q^2=(\xi-d)^2+\eta^2 & q_\xi=\dfrac{\xi-d}{q} & q_\eta=\dfrac{\eta}{q}
\end{array}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi F_0 \;&=\; \frac{(bp-dq)\xi}{a}+\frac{(ap-cq)(\xi-p)}{b}-\frac{(ad+bc)(\xi-d)}{q},\\
`\partial_\eta F_0 \;&=\; \eta\left(\frac{(bp-dq)}{a}+\frac{(ap-cq)}{b}-\frac{(ad+bc)}{q}\right).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Назовем набор величин $(a,\ldots,q,\xi,\eta)$ допустимым, если он соответствует конфигурации, описанной в Предложении 4.2 и треугольник ABC невырожден.

Лемма 4.4. *Система* $\partial_\xi F_0=\partial_\eta F_0=0$ *не имеет допустимых решений.*

Доказательство. Вычитая из первого уравнения в (4.2) второе, умноженное соответственно на ξ/η и $(\xi-p)/\eta$, учитывая, что $c+d=p$, и избавляясь от знаменателей, упростим заданные уравнения:

$$
\begin{aligned}
pq\,(cq-ap)\;+\;bd\,(ad+bc)\;&=\;0,\\
pq\,(dq-bp)\;+\;ac\,(ad+bc)\;&=\;0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Покажем, что допустимые решения удовлетворяют равенству $a=b=q$.

Беря сумму уравнений и подставляя $p=c+d$, получим факторизуемое уравнение:

$$[(b-q)d\;+\;(a-q)c]\,[(b-q)c\;+\;(a-q)d]\;=0.$$

Возможны два случая.

Случай I: $(b-q)d+(a-q)c=0$. В качестве второго уравнения возьмем определитель системы (4.3) относительно неизвестных pq и $(ad+bc)$,

$$0=\Delta\;=\;ac(cq-ap)+bd(bp-dq)\;=\;ac\,[(q-a)c-ad]\;+\;bd\,[(b-q)d+bc].$$

В данном случае

$$\Delta \;=\; ac\,[(b-q)d - ad] \;+\; bd\,[(q-a)c + bc] = cd(b-a)(a+b+q),$$

откуда $a = b$ на допустимом решении. Далее, $0 = (b-q)d + (a-q)c = (b-q)(c+d)$, следовательно, $q = b = a$.

Случай II: $(b-q)c + (a-q)d = 0$, т.е. $ad + bc = pq$. Подставляя в первое уравнение системы (4.3), получим $pq\,(cq - ap + bd) = 0$. С учетом $p = c + d$, получилась однородная линейная система уравнений

$$(b-q)c + (a-q)d = 0, \qquad (q-a)c + (b-a)d = 0$$

относительно c и d с определителем

$$(b-q)(b-a) + (a-q)^2 = (a-q)^2 - (a-q)(b-q) + (b-q)^2.$$

Равенство нулю возможно лишь при $a = b = q$.

Итак, в обоих случаях (4.3) влечет $a = b = q$. Однако равенство $a = b = q$ геометрически невозможно, т.к. всегда $q < \max\,(a, b)$. Этим завершается доказательство Леммы 4.4 и Предложения 4.2. ■

§ 5. Несуществование компактной компоненты подмножества $F = F_z = 0$ в $\mathcal{Q}_1$

5.1. Усиление системы (3.2)

Лемма 5.1. *Предположим, что множество решений системы* (3.2) *на множестве* $\mathcal{Q}_1$ (см. (2.2), (3.3)) *компактно (т.е. не имеет предельных точек на* $\partial\mathcal{Q}_1$*) и непусто. Тогда хотя бы одна из систем* (3.4) *или*

$$F \;=\; F_z \;=\; F_{zz} = 0 \tag{5.1}$$

имеет решение в $\mathcal{Q}$.

Доказательство. Из предположений Леммы следует, что множество $\tilde{\mathcal{M}}_1$ решений системы (3.2) на множестве $\tilde{\mathcal{Q}}_1 = \{u = 1\} \cap \mathcal{Q}$ также компактно и непусто. Можно считать, что F теперь является функцией лишь четырех переменных x, y, z, t. Рассмотрим оптимизационную задачу

$$t|_{\tilde{\mathcal{M}}_1} \;\to\; \max\,.$$

Составим выражение Лагранжа

$$t - \lambda F - \mu F_z. \tag{5.2}$$

Дифференцируя по z и учитывая (3.2), получим $\mu F_{zz} = 0$.

В случае $F_{zz} = 0$ имеем систему (5.1). Если же $F_{zz} \neq 0$, то $\mu = 0$. Дифференцируя (5.2) по t, находим $1 - \lambda F_t = 0$, откуда $\lambda \neq 0$. Дифференцируя (5.2) по x и y, находим теперь $F_x = F_y = 0$. Мы получили 4 из 5 уравнений (3.4). Оставшееся уравнение $F_u = 0$ следует из первых четырех в силу тождества Эйлера для однородных функций. ■

В оставшейся части параграфа мы докажем несуществование решений системы (3.4), оставляя за рамками данной работы анализ системы (5.1). Этот пробел упомянут во Введении.

5.2. Рационализация

Функция $F(x, \dots, t)$, являющаяся композицией $C_3(a, \dots, q)$ с подстановками (2.3), содержит квадратные корни.

Частичная рационализация. Положим $F^* = (ab + cd)p + (ad + bc)q$ и введем выражение

$$R(x, y, z, u, t) = F \cdot F^* = R_0(x, \dots, t) + \lambda R_1(x, \dots, t), \qquad \lambda = abcd. \tag{5.3}$$

Здесь $R_1 = 2(p^2 - q^2)$, $R_0 = (a^2b^2 + c^2d^2)p^2 - (a^2d^2 + b^2c^2)q^2$ — многочлен степени 2 по t и однородный степени 6 по переменным $x, \dots, u$. Его разложение содержит 64 члена. Очевидно, что на множестве $\mathcal{Q}$ уравнения $F = 0$ и $R = 0$ эквивалентны, поскольку $F^* > 0$.

Полная рационализация. Функция

$$RR(x, y, z, u, t) = (R_0 + \lambda R_1)(R_0 - \lambda R_1)$$

является многочленом по переменным $x, \dots, t$. Имеем факторизацию

$$RR \,=\, 4\,(t^2 - 1)\,p^2\,q^2\;Cycl(x, y, z, u)\;T(x, y, z, u, t), \tag{5.4}$$

где T — многочлен с 62 членами, квадратичный по t и однородный степени 6 по остальным переменным. Приводим этот многочлен в явном виде, следуя принципу "Лучше один раз увидеть. . . ":

$$\begin{aligned} T \;=\;& 4T_2\,t^2 \,+\, 4T_1\,t \,+ T_0, \\ T_0 \;=\;& 2y^3z^3 + 3yzx^4 + 2y^3zx^2 + 2yz^3x^2 - 2x^3uy^2 - 2xu^3y^2 - 3xuy^4 - \\ & 2xu^3z^2 + 2x^2yzu^2 - zy^5 - yz^5 + ux^5 - 2xuy^2z^2 - 3xuz^4 - 2x^3uz^2 \\ & + xu^5 + 3yzu^4 + 2y^3zu^2 + 2yz^3u^2 - 2x^3u^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_1 = \;& z^2y^3x - y^2x^3z + y^4xz - y^2z^3x + yz^2x^3 - z^4xy - x^3yu^2 + x^2y^3u \\ & -x^4uy + x^2u^3y - xu^2y^3 + z^4uy + y^2z^3u - yz^2u^3 - y^3uz^2 - y^4uz \\ & +u^3y^2z - u^4xz + xu^2z^3 - x^2u^3z - x^2uz^3 + x^4uz + u^2x^3z + u^4xy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2 = \;& -y^3zx^2 - 2y^2z^2x^2 - yz^3x^2 + x^3uy^2 + 2y^2x^2u^2 - yz^3u^2 - \\ & 2u^2y^2z^2 - y^3zu^2 + xu^3z^2 + 2u^2x^2z^2 + x^3uz^2 + xu^3y^2 - 4x^2yzu^2 \\ & -2x^3uyz + 4xuy^2z^2 + 2xy^3zu - 2xyu^3z + 2xyz^3u.\end{aligned}$$

Из (5.4) видно, что если $C_3 = 0$ и $T \neq 0$, то $Cycl = 0$. К сожалению, утверждение $T \neq 0$ неверно (см. ниже). Система, рассматриваемая в следующей Лемме, не эквивалентна (3.2), но будет использована в § 6 при доказательстве несуществования примыкающих к границе семейств решений системы (3.2).

Лемма 5.2. *Всякое решение системы* (3.2) *на множестве* $\mathcal{Q}$ *является также решением системы*

$$T = 0, \qquad T_z = 0. \tag{5.5}$$

Доказательство. Имеем $T \cdot Cycl {=} F \cdot \Xi$, где Ξ — рациональная функция без особенностей на $\mathcal{Q}$. Из уравнений (3.2) следует

$$T \cdot Cycl \;=\; \partial_z(T \cdot Cycl) \;= 0.$$

Предположим сначала, что $Cycl = 0$, $T \neq 0$. Тогда $\partial_z Cycl = 0$. Но $\partial_z Cycl = -y \neq 0$, противоречие.

В случае $Cycl \neq 0$, $T = 0$ имеем $T_z = 0$, как утверждалось. Остается доказать, что невозможен случай $T = Cycl = 0$. В результате подстановки $u = 1$, $x = yz$ в T получим факторизующийся многочлен

$$4\,y(y-1)(y+1)(y^2+2ty+1)\,z(z-1)(z+1)(z^2-2tz+1),$$

который не обращается в 0 на множестве $\mathcal{Q}$. ■

Следствие. *Всякое решение системы* (3.4) *на множестве* $\mathcal{Q}$ *является также решением системы*

$$T \,=\, T_x \,=\, T_y \,=\, T_z \,=\, T_u \,=\, 0. \tag{5.6}$$

Можно было бы надеяться доказать отсутствие решений системы (3.4), доказав отсутствие решений полиномиальной системы (5.6). Но последняя имеет решения. (Например, (5.6) обращается в тождество при $u = x$, $y = z$.) Доказательство в следующем п. основано на анализе аналогичной системы с частичной рационализацией,

$$R \,=\, R_x \,=\, R_y \,=\, R_z \,=\, R_u \,=\, 0, \tag{5.7}$$

которая эквивалентна (3.4) на $\mathcal{Q}$, поскольку $F = R/F^*$, $F^* \neq 0$.

5.3. Несуществование решений системы (5.7)

Прежде всего, запишем производные R_x и т.д. в виде рациональных функций по $x, \ldots, t$ и λ. Имеем

$$\lambda_x = \lambda\left(\frac{a_x}{a} + \frac{d_x}{d}\right) = \lambda\left(\frac{x-yt}{a^2} + \frac{x+zt}{d^2}\right).$$

Поэтому

$$\hat{R}_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} a^2 d^2\, \partial_x R$$

— алгебраический полином по переменным x, y, z, t, λ. Аналогично, многочленами (по тем же переменным) являются

$$\hat{R}_y = a^2 b^2\, \partial_y R, \qquad \hat{R}_z = c^2 d^2\, \partial_z R. \qquad \hat{R}_u = b^2 c^2\, \partial_u R,$$

Получена система 5 полиномиальных уравнений с неизвестными x, y, z, u, t и λ

$$R = \hat{R}_x = \hat{R}_y = \hat{R}_z = \hat{R}_u = 0. \tag{5.8}$$

Игнорируя уравнение связи (второе уравнение в (5.3)), будем считать λ независимой переменной от $x, \ldots, t$. Этим мы разрушаем однородность функции R по переменным $x, \ldots, u$, следовательно 5 уравнений системы (5.8) более не являются зависимыми в силу тождества Эйлера. Система (5.8) квазиоднородна по 5 переменным (исключая t): переменные $x, \ldots, u$ имеют вес 1, а вес λ равен 4. Одно из значений можно выбрать произвольно. Зафиксируем значение $u = 1$. Теперь (5.8) становится системой 5 уравнений с 5 неизвестными x, y, z, t, λ.

Доказать отсутствие решений этой небольшой полиномиальной системы оказалось нелегко. Автору пришлось перепробовать несколько схем исключения. Действуя "как попало", приходим к исчерпанию вычислительных ресурсов.

Описываемая ниже схема оказалась выполнимой и, следовательно, относительно экономной, но все же далеко выходит за пределы возможностей ручного счета.

Шаг 1. Исключаем λ, вычисляя результанты линейных по λ уравнений

$$Res_x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Resultant}_\lambda(R,\, \hat{R}_x),$$

и аналогично Res_y, Res_z, Res_u. Результанты факторизуются, например,

$$Res_x = -4\,(t^2-1)\,(y+z)^2\,(x+1)\,\tilde{Res}_x,$$

где $\tilde{Res}_x$ — многочлен от x, y, z, t с 92 членами.

Замечание. На последующих шагах нам многократно будут встречаться факторизации, в которых некоторые множители не обращаются в 0 на множестве Q. Например, таковы три множителя в формуле для Res_x выше; другие примеры: x, $t \pm 1$, $z^2 - 2tzy + y^2$. Такие множители будем называть тривиальными. Некоторые множители, например, $y - 1$, $x + 1 - y - z$, $y - xz$, не относятся к тривиальным, но приводят к простым ответвлениям от основной линии. Мы рассматриваем соответствующие варианты в леммах после завершения наиболее трудной части доказательства. В тексте мы называем такие множители простыми (по английски — "simple", но не "prime").

<u>Шаг 2</u>. Исключаем t. Факторизация результанта многочленов $\tilde{Res}_x$ и $\tilde{Res}_y$ содержит, помимо тривиальных множителей, простые множители

$$z - xy, \quad y - xz, \quad x - yz, \quad x - y - z + 1, \tag{5.9}$$

и один "большой"множитель степени 6 с 18 членами, который обозначим $Res_{xy}(x, y, z)$. Аналогично, факторизация результанта $\tilde{Res}_y$ и $\tilde{Res}_u$ относительно t приводит к тем же простым множителям и большому множителю $Res_{yu}(x, y, z)$. Между коэффициентами многочленов Res_{xy} и Res_{yu} имеется очевидное соответствие, отвечающее симметрии исходной задачи относительно перестановки $x \to y \to u \to z \to x$, $t \to -t$.

Аналогично определяются большие множители Res_{uz} и Res_{zx} результантов (относительно t) пар $(\tilde{Res}_u, \tilde{Res}_x)$ и $(\tilde{Res}_x, \tilde{Res}_x)$.

<u>Шаг 3</u> (решающий). Имеют место факторизации (найдены методом проб с помощью *Maple*).

$$z\, Res_{xy} + y\, Res_{zx} = (y - z)(y + z)\, P_4^{(1)}(x, y, z),$$

$$y\, Res_{uz} - z\, Res_{yu} = x(y - z)(y + z)\, P_4^{(2)}(x, y, z),$$

$$P_4^{(1)} + P_4^{(2)} = (x - 1)(x + 1)(3x^2 - 2x + 3 + y^2 + 10yz + z^2).$$

Последний множитель — положительно определенная квадратичная форма. Таким образом, остается рассмотреть "простые"случаи, когда обращается в 0 либо один из простых множителей (5.9), либо $y - z$, либо $x - 1$.

<u>Случай $x - y - z + 1 = 0$</u>. Имеем

$$\tilde{Res}_y[z = x + 1 - y] = -4(y - 1)(y^2 + 2yt + 1)(x + 1)^2(x - y)(x^2 - 2xyt + y^2).$$

Следовательно либо $y = 1$, $x = z$, либо $x = y$, $z = 1$. В обоих случаях $Cycl = xu - yz = 0$. Но равенство $F = F_z = 0$ невозможно на множестве $\mathcal{C}$ (см. доказательство Леммы 5.2).

<u>Случай $x = yz$</u>. Аналогично, из факторизации

$$\tilde{Res}_x[x = yz] = 2(yz+1)\, y^2(y^2-1)(y^2+2ty+1)\, z^2(z^2-1)(z^2-2tz+1)$$

находим, что либо $y = 1$, $x = z$, либо $z = 1$, $x = y$, т.е. $Cycl = 0$, и заключение как в предыдущем случае.

<u>Случай $y = xz$</u> (Случай $y = xz$ симметричен.) Имеем факторизации

$$\tilde{Res}_x[z = xy] = x^2(x^2-1)\,(y^2-1)(y^2+2ty+1)\, P_5(x,y,t),$$
$$\tilde{Res}_u[z = xy] = -x(x^2-1)\,(y^2-1)(y^2+2ty+1)\, P_6(x,y,t),$$

где

$$P_5(x,y,t) = x + x^2 + y^2 + y^4 + x^2y^2 - xy^4 - 4xy^3t,$$
$$P_6(x,y,t) = 1 + x + y^2 - xy^4 + x^2y^2 + x^2y^4 - 4xy^3t.$$

Далее,

$$P_6 - P_5 = (x^2-1)(y^2-1)(y^2+1).$$

Помимо подслучаев, ведущих к равенству $Cycl = 0$ немедленно, остается только случай $x = 1$, $y = z$. При этом $a = c$, $b = d$, и четырехугольник $ABCD$ — параллелограм. Выражение C_3 упрощается: $C_3 = 2(abp - abq)$. Получаем $p = q$, откуда $x = y = z = u$, т.е. снова $Cycl = 0$.

Этим заканчивается разбор всех случаев и доказательство несуществования решения системы (5.7), а, значит, и системы (3.4).

§ 6. Несуществование решений системы (3.2) вблизи границы множества $\mathcal{Q}_1$

6.1. Стратификация границы

Гипотетически, множество $\mathcal{M}$ (см. с. 11) может иметь предельные точки на границе множества $\mathcal{Q}_1$. Рассмотрим стратификацию границы (разбиение ее на множества разных размерностей, открытые в соответствующих координатных подпространствах). Грани коразмерности $k = 1, \ldots, 4$ соответствуют обращению ровно k из неравенств (2.2) в равенства. (Все 5 неравенств не могут одновременно обратиться в равенства в силу условия (3.3).)

Введем терминологию, которая поможет нам компактно описать многочисленные случаи. Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое подмножество 5-элементного множества переменных x, y, z, u, t. Будем говорить, что имеет место *случай $\mathcal{V}$*, если множество $\mathcal{M}$ имеет предельную точку на грани, где неравенства (2.2) для переменных из $\mathcal{V}$ обращаются в равенства.

Например, имеет место случай (x), если у системы (3.2) есть семейство решений, для которого $x \to 0$, а y, z, u не стремятся к 0 и $t \not\to \pm 1$.

Перечислим случаи, которые нужно рассмотреть и исключить, чтобы доказать Теорему 2.

1) Случаи коразмерности 1: (x), (y), (z) и (u). Случай (z) уже исключен Предложением 4.2. Остальные случаи невозможны по симметрии, т.к. уравнение $F_z = 0$ не используется в Предложении 4.2.

2) Случай (t) коразмерности 1. Он исключается Предложением 6.1.

3) Случаи (xu), (zy) и их вырождения (xut), (zyt) покрываются Леммой 6.2.

4) Случай (xy) исключается Предложением 6.3. По симметрии, также исключается случай (uy).

5) Случай (xz) и симметричный (uz) исключаются Предложением 6.4.

6) Случаи коразмерности 2, когда одна из переменных — t, например, (xt), — охватываются Предложением 6.5.

7) Случаи коразмерности 3 с тремя длинами: (xyz), (yzu), (zux) и (uxy) — исключаются Леммой 6.6. Оказываются охваченными и их вырождения коразмерности 4: $(xyzt)$ и т.д.

8) (xyt) и симметричный случай (uyt).
9) (xzt) и симметричный случай (uzt). Последние два случая оставлены за рамками настоящей работы. Их анализ представляет самостоятельный интерес с точки зрения техники, изложенной в [2, гл. 2]. В этих случаях разрешение особенности требует нескольких итераций. Здесь мы ограничиваемся формулировкой нужных результатов (Предложение 6.7).

6.2. Случай (t) (складывающийся четырехугольник)

Предложение 6.1. *Случай (t) невозможен.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $t \to 1^-$. Из (4.1) следует, что равенство $\lim_{t\to 1} F = 0$ невозможно, если $\lim(x-y)(u-z) > 0$. Имеется в виду предел вдоль некоторой кривой $\langle x(t), y(t), z(t), u(t), t\rangle$, $t \to 1^-$. В дальнейшем из оставшихся двух возможных комбинаций знаков зафиксируем такую:

$$\lim(y-x) \geq 0, \qquad \lim(u-z) \geq 0. \tag{6.1}$$

Противоположный выбор ведет к полностью аналогичным вычислениям.

Рассмотрим теперь 2 случая:

А) Пределы (6.1) строго положительны;

Б) Хотя бы один из этих пределов равен 0.

Случай А. Если пределы (6.1) положительны, то с точностью до членов порядка τ имеем

$$\begin{aligned} a &\sim (y-x) + \frac{xy}{y-x}\tau, \qquad & b &\sim (u+y) - \frac{uy}{u+y}\tau, \\ c &\sim (u-z) + \frac{uz}{u-z}\tau, \qquad & d &\sim (z+x) - \frac{zx}{z+x}\tau. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Отсюда находим асимптотику при $\tau \to 0$:

$$F \cdot abcd = \tau\,(y+z)(x+y)(xu-yz)\,P_3(x,y,z,u) \;+\; O(\tau^2),$$

где

$$P_3 = ux^2 + yz^2 + 3yzx + 3zux - xu^2 - zy^2 - 3uyz - 3uyx.$$

Многочлен P_3 имеет степень 2 по переменной x. Коэффициент при x^2 равен $u > 0$, и $P_3[x=0] = yz(z-y-3u) < 0$, $P_3[x=y] = y(z-u)\,(u+2y+z) < 0$. Следовательно, равенство $P_3 = 0$ несовместно с неравенствами (6.1). Остается возможность обращения F в 0 при $\tau > 0$ в случае $xu - yz \to 0$. Эта возможность реализуется — ср. условие (0.1). Покажем, однако, что при этом $F_z \neq 0$.

Подставляя (6.2) в F_z, находим асимптотику при $\tau \to 0$:

$$F_z \cdot (abcd) \sim -\tau\,(x+u)\,P_7(x,y,z,u),$$

Многочлен P_7 однороден; подстановка $u = 1$ и $x = yz$ приводит к многочлену, который факторизуется:

$$P_7(yz, y, z, 1) = \;4\,[y(y+1)z(z-1)]^2\,(y+z).$$

В рассматриваемом случае $\lim(z-1) = \lim(z-u) < 0$. Следовательно, $F_z \neq 0$ при малых $\tau > 0$.

Случай Б. Предположим, что $z - u \to 0$. Переключаясь на рассмотрение многочлена T (см .п. 5.2) вместо F, имеем простую факторизацию:

$$T[z=u,\, t=1] \;=\; u\,(x-y)^3\,(x+y+2u). \tag{6.3}$$

Следовательно, необходимо также $x - y \to 0$. (Можно было предположить последнее условие и вывести первое). Итак, имеем 3 малых параметра:

$$\tau = 1 - t, \qquad v = y - x, \qquad s = u - z$$

Заметим, что теперь мы не имеем права считать, что v и s положительны.

Этот случай сильно вырожден и труден. Для его анализа мы будем использовать как пару уравнений $F = F_z = 0$, так и пару уравнений $T = T_z = 0$ — см. Лемму 5.2.

1°. Обратимся сначала к величине $F = C_3$. Запишем

$$C_3 = Aa + Cc, \qquad A = bp - dq, \qquad C = dp - bq, \tag{6.4}$$

и вычислим асимптотику коэффициентов A и C. В данном случае

$$b = (u+y) - \frac{uy}{u+y}\,\tau + O(\tau^2), \qquad d = (x+z) - \frac{xz}{x+z}\,\tau + O(\tau^2). \tag{6.5}$$

Обозначая

$$\xi = |s| + |v|$$

и подставляя асимптотики (6.5) в выражения для A и C, находим

$$A = 2(x+u)s + O(\tau\xi) + O(\tau^2), \qquad C = -2(x+u)v + O(\tau\xi) + O(\tau^2). \tag{6.6}$$

В действительности члены, содержащие некоторую степень τ без множителей s или v, отсутствуют, но мы докажем этот факт не для величин A и C в отдельности, а для уравнения $Aa + Cc = 0$. Доказательство просто: при $v = s = 0$ имеем $C_3 = 0$ (геометрически — это случай равнобочной трапеции).

Возводя уравнение $Aa = -Cc$ в квадрат и используя формулы

$$a^2 = v^2 + 2xy\tau, c^2 = s^2 + 2uz\tau, \tag{6.7}$$

получаем после сокращений

$$x^2s^2 - u^2v^2 = O(\xi^2(\xi + \tau)).$$

Следовательно, $s \sim \pm(u/x)v$. Возвращаясь к уравнению $Aa = -Cc$, определяем, что ему удовлетворяет только ветвь со знаком $+$. (Полученный результат можно было ожидать — он согласуется с условием (2.8).)

2°. Теперь обратимся к уравнению $\partial_z C_3 = 0$. Используя соотношения $c\,\partial_z c = z - ut$ и $d/dz = -d/ds$ и независимость a от z, выводим из (6.4):

$$c\,\partial_z C_3 \;=\; X + acY,$$

где

$$X = -c^2\,\partial_s C + (z - ut)C, \qquad Y = \partial_s A.$$

Из (6.6) видно, что $\lim Y = 2(x+u) > 0$, а из (6.7) следует, что

$$ac > \operatorname{const}\tau. \tag{6.8}$$

Следовательно, $\tau = O(acY)$. Обратимся к коэффициенту X. Поскольку $\partial_s C = O(\xi)$, первое слагаемое в X есть $O(\xi^3 + \xi\tau)$. Второе слагаемое

$$(z - ut)C = (-s + u\tau)C = 2(x + u)vs + O(\xi^3 + \xi\tau).$$

Таким образом, на асимптотическом решении уравнения $X + acY = 0$ должна выполняться оценка

$$\tau = O(X) = O(\xi^2).$$

Эту оценку можно усилить, поскольку неравенство (6.8) слишком грубое. В силу результата п.1°, ξ^2 и vs имеют одинаковый асимптотический порядок. Если предположить, что $\lim \tau/\xi^2 > 0$, то получим

$$\lim \frac{acY}{vs} > 2(x + u) = \lim \frac{X}{vs},$$

противоречие. Следовательно, $\tau = o(\xi^2)$.

3°. Укорочение уравнения $T = 0$ при малых s, v, τ имеет вид

$$T \sim 4(x + u)^2 \,(s - v)(s + v)(sx + v) + O(\tau\xi + \xi^4).$$

Первое слагаемое доминирует, и мы знаем, что $sx/vu \to 1$. Следовательно, на асимптотическом решении $x/u \to 1$.

4°. Обратимся, наконец, к уравнению $T_z = 0$ и найдем его укорочение при s, v, $\to 0$, $w = x - u \to 0$ и $\tau = o(s^2)$:

$$T_z \sim -16(s + v)(3s - v) + o(\xi^2).$$

Равенство $T_z = 0$ несовместно с выведенным в 3° условием $s/v \to 1$. Полученное противоречие доказывает невозможность Случая Б. ■

6.3. Оставшиеся предельные случаи

Лемма 6.2. (О сплющивающемся четырехугольнике). *Случаи (xu), (zy) и их вырождения (xut), (zyt) невозможны. Более того, одно лишь уравнение $F = 0$ не имеет семейств решений, выходящих на соответствующие грани.*

Доказательство. Предположим, что $x \to 0$, $u \to 0$, а z и y не малы. Тогда $a, b \to y$, $c, d \to z$, $p \to 0$. Следовательно, $F \to -2yz(y + z) \neq 0$. ■

Предложение 6.3. (Вырождение четырехугольника в треугольник – I) *Случай (xy) невозможен.*

Доказательство. При $x \to 0$, $y \to 0$ имеем

$$a = O(x+y), \quad b = u + yt + O(y^2), \quad c = \mathrm{const}, \quad d = z + xt + O(x^2).$$

Отсюда находим асимптотики

$$\begin{aligned} F &= x\alpha + y\beta + a\gamma \,+\, O(x^2+y^2), \\ F_z &= x\tilde\alpha + y\tilde\beta + a\tilde\gamma \,+\, O(x^2+y^2), \end{aligned} \tag{6.9}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha &= c(ut+z), & \tilde\alpha &= z(z^2 - u^2t^2 + c^2), \\ \beta &= -c(u+zt), & \tilde\beta &= (1-t)z^3 + (1+t)(u-z)uz, \\ \gamma &= u^2 - z^2, & \tilde\gamma &= -2z^2c. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Найдем предельный коэффициент пропорциональности x и y, исключая a из системы (6.9). Получаем

$$\frac{x}{y} \sim \frac{\tilde\beta\gamma - \beta\tilde\gamma}{\alpha\tilde\gamma - \tilde\alpha\gamma} = \frac{z}{u}\,\frac{3u^2+z^2}{3z^2+u^2} =: s_*.$$

(В ходе выкладок использовали выражение c^2 через u, z, t, см. (2.3).)

Завершим доказательство Предложения, показав, что укорочение второго из уравнений (6.9) не имеет решений с $x/y = s_*$. Избавляясь в этом уравнении от иррациональности $a = (x^2+y^2-2xyt)^{1/2}$, получаем квадратичную форму

$$(\tilde\alpha^2 - \tilde\gamma^2)\,x^2 \,+\, (\tilde\beta^2 - \tilde\gamma^2)\,y^2 \,+\, (2\tilde\alpha\tilde\beta + 2t\tilde\gamma^2)xy \,=\, 0.$$

Подставляя коэффициенты из (6.10) и полагая $u = 1$, $y = 1$, $x = s_*$ (выражения однородны!), получим многочлен от z с параметром t, допускающий факторизацию

$$z^4\,(z^2 - 2tz + 1)\,(3z^2 - 2tz + 3).$$

Он не имеет положительных корней, если $|t| < 1$. ■

Предложение 6.4. (Вырождение четырехугольника в треугольник – II) *Случай* (xz) *невозможен.*

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему. В конце надо будет разобрать один более тонкий случай.

При $x \to 0$, $z \to 0$ имеем

$$a = y - xt + O(x^2), \qquad b = \mathrm{const}, \qquad c = u - zt + O(z^2). \qquad d = O(x+z).$$

Аналогично (6.11), находим

$$F = x\alpha + z\beta + d\gamma \, + \, O(x^2 + z^2),$$
$$F_z = x\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta} + d\tilde{\gamma} \, + \, O(x^2 + z^2), \tag{6.11}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha &= b(y - ut), & \tilde{\alpha} &= ut(u^2 - y^2), \\ \beta &= -b(u - yt), & \tilde{\beta} &= u(u^2 - y^2), \\ \gamma &= u^2 - y^2, & \tilde{\gamma} &= bu(ty - u). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Предельный коэффициент пропорциональности x и z равен

$$s_* = \frac{y}{u}\,\frac{3u^2 - 2tuy - y^2}{y^2 - 2tuy + u^2}.$$

Рассматривая квадратичную форму, соответствующую первому из уравнений (6.11), получим после упрощений и подстановок $u = 1$, $x = s_* z$ предельное уравнение для z и t

$$4(t^2 - 1)\, y^2 (y^2 - 1)^2\, (y^2 + 2ty - 3) = 0.$$

Таким образом, остается возможность существования асимптотического решения, на котором

$$y^2 + 2ty - 3 \to 0. \tag{6.13}$$

Рассмотрение квадратичной формы, соответствующей второму уравнению в (6.11) также не исключает этот случай. Заметим, что в этом случае $s_* = 0$, т.е. $x = o(z)$. Следовательно, $d = z + o(z)$. Получаем (с $u = 1$)

$$F = z\left((1 - b) + bty - y^2\right) \, + \, o(z). \tag{6.14}$$

Условие (6.13) влечет $b \to 2$. Коэффициент при z в (6.14) в пределе равен $-y^2 + 2ty - 1 < 0$. Этим возможность (6.13) исключается. ■

Предложение 6.5. *Случаи (xt), (ut), (yt), (zt) невозможны.*

Доказательство. Рассмотрим первый из двух подслучаев случая (xt): $x \to 0$, $t \to +1$. Вначале, следуя доказательству Предложения 6.1, получим (принимая во внимание, что $y > x$)

$$\lim(u - z) \geq 0. \tag{6.15}$$

Рассмотрим уравнение $T = 0$. При $t = 1$, $x = 0$ оно факторизуется:

$$T[t = 1,\ x = 0] \; = \; -yz(3u + y - z)(u + y - z)(-u + y + z)(u + y + z) = 0.$$

Ввиду (6.15), факторы $(3u+y-z)$ и $(u+y-z)$ не могут в пределе обращаться в 0, поскольку y ограничено снизу. Остается единственная возможность

$$\lim(y+z-u)=0.$$

Однако

$$T_z[t=1,\ x=0,\ u=y+z]\ =\ -8y^2z(y+z)(2y+z)\neq 0.$$

Подслучай $t\to -1$ приводит к факторизации

$$T[t=-1,\ x=0]\ =\ -yz(-3u+y-z)(-u+y-z)(-u+y+z)(u+y+z),$$

откуда снова следует, что на предельном семействе $u-y\to z$. Но

$$T_z[t=-1,\ x=0,\ u=y+z]\ =\ -8yz^2(y+2z)(y+z)\neq 0.$$

Случай (ut) не требует отдельного доказательства ввиду симметрии $x\leftrightarrow u,\ t\leftrightarrow 1-t$. Остальные случаи, описанные в Предложении, доказываются аналогично. Приведем соответствующие факторизации.

Случай $y\to 0,\ t\to 1$.

$$\begin{aligned} &T[y=0,\ t=1]=xu(u+x-z)(-u+x+z)(u+x+z)(-u+x+3z),\\ &T_z[y=0,\ t=1,\ z=x+u]=-8x^2u(u+x)(2x+u)\neq 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Случай $z\to 0,\ t\to 1$.

$$\begin{aligned} &T[y=0,\ t=1]=xu(u+y-x)(x+u-y)(u+x+y)(-u+x+3y),\\ &T_z[y=0,\ t=1,\ z=x+u]=-8x^2u(u+x)(2x+u)\neq 0. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Предложение доказано. ∎

Лемма 6.6. *Первое укорочение многочлена T при $u=1,\ x,y,z\to 0$, есть*

$$T(x,y,z,1,t)\sim x+3yz.$$

Доказательство. Прямая проверка. ∎

Следствие. *Случай $\mathcal{V}$, когда множество $\mathcal{V}$ содержит три из четырех параметров x, y, z, u, невозможен.*

Предложение 6.7. *Система* (3.2) *не имеет семейств решений с асимптотиками $t\to\pm 1$, $\xi,\eta\to 0$, где ξ, η — два из четырех параметров x, y, z, u.*

Это предложение в настоящей работе не доказывается.

Приложение. Нули функции C_3 для *невыпуклых* симметричных четырехугольников с перпендикулярными диагоналями

Фиксируем масштаб: $z = 1$. Полная система ограничений есть

$$u = x, \qquad t = 0, \qquad z = 1. \tag{A.1}$$

При этих условиях

$$C_3 = 2x(a^2 + d^2) - 2(y + 1)ad,$$

и рационализованное выражение R (5.3) факторизуется

$$R \;=\; C_3 \cdot \left(x(a^2 + d^2) + (y + 1)ad\right) \;=\; 2(x^2 - y)\, P_4(x, y),$$

$$P_4(x, y) = (3x^2 + 4x^4) + (1 + 2x^2)y + (2 + 3x^2)y^2 + y^3.$$

При $-1 < y < 0$ рационализующий множитель положителен, поэтому множества нулей функции $C_3|(\mathrm{A.1})$ и многочлена $P_4(x, z)$ при условии $-1 < y < 0$ совпадают. Решение с максимальным значением x находится из системы уравнений

$$P(x, z) = 0, \qquad \partial_z P = (3z + 1)(z - 2x^2 - 1) = 0.$$

Решение с положительным x единственно:

$$z = -1/3, \qquad x = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0.227083.$$

При этом

$$a = b \approx 1.025459, \quad c = d \approx 0.403334, \quad p \approx 0.454167, \quad q \approx 0.66667.$$

Список литературы

[1] М. Берже. Геометрия, т.1. М.: Мир, 1985.

[2] А.Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998.

[3] Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

[4] В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии, ч.2. М.: Наука, 1986.

[5] И.Х. Сабитов. Объемы многогранников. М.: Изд. МЦНМО, 2002.